2022 NCTS 大學部學生暑期研究

平面統計物理：伯努力滲透模型

指導教師：國立台灣大學數學系　林偉傑、李志煌
助教：國立台灣大學數學系　馬宗儀、張恒宇、盧德倫

一、 研究主題

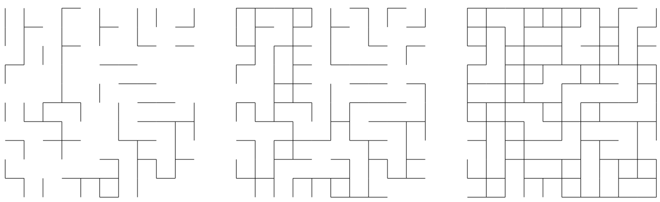
在此暑期研究中，我們想以機率方法來探討平面的統計物理模型，其中最經典的例子是伯努力滲透模型 (Bernoulli percolation)。此模型有個介於 0 與 1 之間的參數 p，我們的目的是探討當 p 變動時，此模型在大尺度下的行為，以及在相變點（或稱臨界點）$p=\frac{1}{2}$ 的性質。

要進行此研究主題的學生必須有下列預備知識：高等微積分、線性代數、機率導論。

二、 主題介紹

伯努力滲透模型在 1957 年由 Broadbent 及 Hammersley 提出，定義如下。給定參數 $p\in[0,1]$ 及方形網格 $\mathbb{Z}^2$，我們以下列方式定義此方形網格的隨機子圖 ω：我們將方形網格的邊集記作 E，我們定義序列 $(\omega(e))_{e\in E}$ 為 i.i.d. 參數為 p 的伯努力隨機變數；換句話說，每個 $\omega(e)$ 取值為 1 的機率為 p，取值為 0 的機率為 $1-p$，且邊與邊之間互為獨立。每個邊的狀態 $\omega(e)=0$ 或 1 代表關 (closed) 或開 (open)，開著的邊代表著邊的兩個端點是連通的，關著的邊代表他們是被切斷的，而我們有興趣的隨機子圖是由邊集 $\{e\in E(\mathbb{Z}^2):\omega(e)=1\}$ 構成的。

下面是此模型在邊長為 10 的方形子網格上的模擬，參數 p 分別為 0.3、0.5 及 0.7：



我們有興趣的是當 p 變動時，此隨機子圖 ω 在大尺度下的性質。

三、 規劃

藉由約 15 小時的課程，教師會帶領學生理解滲透模型的背景知識以及重要的經典性質，其中包括：

1. 滲透模型的遍歷性 (ergodicity)、正相關性 (Harris-FKG inequality) 、負相關性 (BK inequality)；
2. 參數 p 變化下的微分方程：Russo 方程式；
3. 臨界點 p_c 的存在性、臨界點外的指數遞減性質；
4. 在臨界點 p_c 時模型的指數遞減及尺度不變性 (scale invariance)，又稱作 Russo-Seymour-Welsh 性質 (RSW property)。

助教也會針對上述主題進行習題演練，以讓學生更熟稔這些工具的使用。

四、目標

有了基本知識後，我們希望學生能夠嘗試理解並對下列兩方向做思考。

1) 隨機連通元件模型

隨機連通元件模型 (random-cluster model) 是伯努力滲透模型的推廣形式，但此模型失去了邊與邊之間狀態的獨立性，使得更多問題的處理較棘手。因此學生必須要去理解：

1. 如何在無限圖上定義此模型，如何將伯努力滲透模型的技巧挪用至隨機連通元件模型？
2. 臨界點的存在性及在臨界點或臨界點外模型的大尺度性質（多項式遞減或指數遞減），如何將臨界點的 RSW 性質推廣到更一般的情況？
3. 理解在伯努力滲透模型下的 Cardy 公式，並得到此模型界面行為的機率估計。如何推廣至隨機連通元件模型？

2) 伯努力滲透模型在不同圖上的性質

除了在方形網格 $\mathbb{Z}^2$ 上定義伯努力滲透模型之外，我們也可以將他定義在其他的網格上，例如：

(1) 不一樣的平面網格，例如三角網格、六角網格、或是其他有週期性但較不規則的網格；

(2) 高維度的網格；

(3) 有限生成群產生的圖，也就是 Cayley 圖。

我們仍然可以詢問相同或類似的問題：臨界的存在性、在臨界點或臨界點外模型的大尺度性質（多項式遞減或指數遞減），或是在 (3) 的情況中，如何將有限生成群的性質與伯努力滲透模型的性質做連接。

參考資料

[1] H. Duminil-Copin, *Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models*, vol. 25, Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys], Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013, pp. ii+371.

[2] H. Duminil-Copin, “Sixty years of percolation”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV. Invited lectures*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 2829–2856.

[3] G. Grimmett, *Percolation*, Second, vol. 321, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] G. Grimmett, *The random-cluster model*, vol. 333, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[5] R. Lyons and Y. Peres, *Probability on trees and networks*, vol. 42, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, New York, 2016, pp. xv+699.